

به نام خدا
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد اصفهان (خوراسگان)

درس: تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی)

رشته: حسابداری

تحقیق در عملیات

جلسه نهم

فصل سوم

دوگان

تحقیق در عملیات

روش سیمپلکس دوگان

با توجه به مطالب بیان شده در فصل قبل، روش سیمپلکس همواره از یک جواب پایه شدنی که متناظر یک نقطه گوشه ناحیه شدنی است، شروع کرده و با پشت سر گذاشتن نقاط گوشه ای مجاور و بهبود مرحله به مرحله تابع هدف، به جواب بهینه مسئله می رسد. در حالتی که جواب پایه آغازین، به کمک متغیرهای مصنوعی ساخته شود نیز ابتدا به کمک روش M بزرگ و یا روش دومرحله ای، به ناحیه شدنی رسیده و سپس با پشت سر گذاشتن جواب های پایه شدنی و نقاط گوشه، به دنبال جواب بهینه می رود.

تعبیر این مطلب در جدول سیمپلکس این است که در همه جداول سیمپلکس، شرط شدنی بودن جواب و نامنفی بودن بردار سمت راست برقرار است، اما شرط بهینگی لزوماً برقرار نیست و روش سیمپلکس تا برقراری شرط بهینگی در سطر تابع هدف، ادامه می یابد. در نتیجه، جدول نهایی روش سیمپلکس، جدولی است که شرط شدنی بودن و شرط بهینگی را بطور همزمان داشته باشد.

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R.H.S
Z	-1	-1	0	0	0	0
s_1	-1	1	1	0	0	1
s_2	2	4	0	1	0	12
s_3	1	0	0	0	1	3
Z	-2	0	1	0	0	1
x_2	-1	1	1	0	0	1
s_2	6	0	-4	1	0	8
s_3	1	0	0	0	1	3
Z	0	0	-2/6	2/6	0	22/6
x_2	0	1	2/6	1/6	0	14/6
x_1	1	0	-4/6	1/6	0	8/6
s_2	0	0	4/6	-1/6	1	10/6
Z	0	0	0	1/4	2/4	27/4
x_2	0	1	0	1/4	-2/4	9/4
x_1	1	0	0	0	1	18/4
s_1	0	0	1	-1/4	6/4	10/4

مقادیر سمت
راست، همگی
نامنفی هستند

شرط بهینگی
پله پله برقرار
می شود

تحقیق در عملیات

روش سیمپلکس دوگان (سیمپلکس ثانویه) روشی است که با یک جواب پایه ولی نشدنی، که شرط بهیمنگی را دارد، شروع کرده و با تکرارهای خود سعی می کند ضمن حفظ شرط بهیمنگی، شرط شدنی بودن را برقرار کند. به عبارت دیگر، روش سیمپلکس دوگان، جواب های پایه ای که شرط بهیمنگی در سطر تابع هدف برای آن ها برقرار است را پشت سر گذاشته تا به یک جواب پایه از ناحیه شدنی برسد.

این روش برای مسائلی مناسب است که پس از تبدیل آن ها به فرم استاندارد، برخی از اعداد سمت راست محدودیت ها، منفی می شوند، در حالی که پس از ورود اطلاعات به جدول سیمپلکس، شرط بهیمنگی برقرار است. در تشکیل جدول آغازین روش سیمپلکس دوگان نیز مانند روش سیمپلکس، قرینه ضرایب متغیرها در تابع هدف، وارد جدول می شود.

5

تحقیق در عملیات

$$\min \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.} \quad 4x_1 + 2x_2 \geq 8,$$

$$x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

برای حل این مسئله به روش سیمپلکس دوگان، ابتدا طرفین محدودیت های آن را در ۱- ضرب کرده و سپس متغیرهای کمکی را به آنها اضافه می کنیم:

$$\min \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.} \quad -4x_1 - 2x_2 + s_1 = -8,$$

$$-x_1 - x_2 + s_2 = -3,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

6

تحقیق در عملیات

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t. } -4x_1 - 2x_2 + s_1 = -8,$$

$$-x_1 - x_2 + s_2 = -3,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

جدول آغازین روش سیمپلکس دوگان به صورت زیر است:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
z	-3	-2	0	0	0
s_1	-4	-2	1	0	-8
s_2	-1	-1	0	1	-3

همانگونه که می توان دید، این جدول دارای شرط بهینگی است، در حالی که شرط شدنی بودن را ندارد.

7

تحقیق در عملیات

گام های الگوریتم سیمپلکس دوگان برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی به فرم استاندارد به صورت زیر است:

گام ۱. رسم جدول آغازین به کمک یک جواب پایه برای مسئله که دارای شرط بهینگی است.

گام ۲. (تست شدنی بودن) اگر همه مؤلفه های بردار سمت راست نامنفی باشد، جواب پایه فعلی شدنی بوده و با توجه به برقراری شرط بهینگی، به جواب بهینه مسئله رسیده ایم و الگوریتم خاتمه می یابد. در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

8

تحقیق در عملیات

گام ۳. انتخاب متغیر خارج شونده از پایه: متغیر با منفی ترین مقدار در ستون سمت راست، به عنوان متغیر خارج شونده از پایه انتخاب می شود. سطر مربوط به این متغیر، سطر لولا نامیده می شود.

گام ۴. انتخاب متغیر وارد شونده به پایه: ضرایب سطر تابع هدف را نظیر به نظیر بر مؤلفه های منفی سطر لولا تقسیم کرده و قدر مطلق اعداد حاصل را به دست می آوریم. ستون با کمترین مقدار حاصل، متناظر متغیر وارد شونده به پایه است. ستون مربوط به این متغیر، ستون لولا نامیده می شود.

گام ۵. پس از جایگزین کردن متغیر وارد شونده با متغیر خارج شونده، جدول به دست آمده را یکبار سازی کرده و به گام دوم برگردید.

9

تحقیق در عملیات

ملاحظات روش سیمپلکس دوگان:

- اگر تابع هدف مسئله از نوع مینیمم سازی بوده و ضرایب متغیرهای مسئله در تابع هدف، همگی مثبت باشند، با ورود آن ها به جدول آغازین، شرط بهینگی برقرار خواهد بود. برای انتخاب متغیر وارد شونده به پایه در این جدول، حاصل تقسیم ضرایب سطر تابع هدف بر مؤلفه های منفی سطر لولا، همگی مثبت بوده و ستون با کمترین مقدار حاصل، متناظر متغیر وارد شونده به پایه است.

10

تحقیق در عملیات

ملاحظات روش سیمپلکس دوگان:

- در یک مسئله با تابع هدف ماکزیمم سازی، اگر ضرایب متغیرهای مسئله در تابع هدف، همگی منفی باشند، شرط بهینگی در جدول آغازین برقرار خواهد بود. برای انتخاب متغیر وارد شونده به پایه در این جدول، حاصل تقسیم ضرایب سطر تابع هدف بر مؤلفه های منفی سطر لولا، همگی منفی بوده و ستون با بیشترین مقدار حاصل، متناظر متغیر وارد شونده به پایه است.
- اگر در یکی از تکرارهای روش سیمپلکس دوگان، همه مؤلفه های سطر لولا مثبت باشند، مسئله نشدنی است.

11

تحقیق در عملیات

مثال ۱۱-۳. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ & x_1 + x_2 \geq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

برای حل این مسئله به روش سیمپلکس دوگان، ابتدا طرفین محدودیت های آن را در ۱- ضرب کرده و سپس متغیرهای کمکی را به آنها اضافه می کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -4x_1 - 2x_2 + s_1 = -8, \\ & -x_1 - x_2 + s_2 = -3, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0. \end{aligned}$$

12

تحقیق در عملیات

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t. } -4x_1 - 2x_2 + s_1 = -8,$$

$$-x_1 - x_2 + s_2 = -3,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

جدول آغازین روش سیمپلکس دوگان به صورت زیر است:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	-3	-2	0	0	0
s_1	-4	-2	1	0	-8
s_2	-1	-1	0	1	-3

همانگونه که می توان دید، این جدول دارای شرط بهینگی است، در حالی که شرط شدنی بودن را ندارد.

13

تحقیق در عملیات

تکرارهای روش سیمپلکس دوگان برای حل این مسئله به صورت زیر است. توجه کنید که با توجه به مینیمم سازی بودن تابع هدف، مینیمم اعداد حاصل در گام چهار، متغیر وارد شونده به پایه را مشخص می کند.

14

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	-۳	-۲	۰	۰	۰
s_1	-۴	-۲	۱	۰	-۸
s_2	-۱	-۱	۰	۱	-۳

تکرار اول:

گام ۲ (تست شدنی بودن): با توجه به منفی بودن بردار سمت راست، جواب فعلی شدنی نیست.

15

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	-۳	-۲	۰	۰	۰
s_1	-۴	-۲	۱	۰	-۸
s_2	-۱	-۱	۰	۱	-۳

تکرار اول:

گام ۳ (انتخاب متغیر خارج شونده): متغیر پایه s_1 با منفی ترین مقدار سمت راست، بعنوان متغیر خارج شونده از پایه انتخاب می شود. سطر متناظر s_1 ، سطر لولا نام دارد.

16

تحقیق در عملیات




	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	-۳	-۲	۰	۰	۰
s_1	-۴	-۲	۱	۰	-۸
s_2	-۱	-۱	۰	۱	-۳

تکرار اول:

گام ۴ (انتخاب متغیر وارد شونده): ضرایب سطر تابع هدف را نظیر به نظیر بر مؤلفه های منفی سطر لولا تقسیم کرده و کمترین مقدار حاصل، متناظر متغیر وارد شونده به پایه است. بنابراین، متغیر غیرپایه x_1 که متناظر $\min\{-۳/-۴, -۲/-۲\} = ۳/۴$ است، بعنوان متغیر وارد شونده به پایه انتخاب می شود.

17

تحقیق در عملیات



	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	-۳	-۲	۰	۰	۰
s_1	-۴	-۲	۱	۰	-۸
s_2	-۱	-۱	۰	۱	-۳

گام ۵. متغیر غیرپایه x_1 را جایگزین متغیر پایه s_1 کرده و جدول جدید، رسم و یکه سازی می شود.

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	۰	$-۱/۲$	$-۳/۴$	۰	۶
x_1	۱	$۱/۲$	$-۱/۴$	۰	۲
s_2	۰	$-۱/۲$	$-۱/۴$	۱	-۱

18

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
z	۰	$-1/2$	$-3/4$	۰	۶
x_1	۱	$1/2$	$-1/4$	۰	۲
s_2	۰	$-1/2$	$-1/4$	۱	-۱

تکرار دوم:

گام ۲ (تست شدنی بودن): با توجه به منفی بودن بردار سمت راست، جواب فعلی شدنی نیست.

19

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
z	۰	$-1/2$	$-3/4$	۰	۶
x_1	۱	$1/2$	$-1/4$	۰	۲
s_2	۰	$-1/2$	$-1/4$	۱	-۱



تکرار دوم:

گام ۳ (انتخاب متغیر خارج شونده): متغیر پایه s_2 با مقدار منفی سمت راست، بعنوان متغیر خارج شونده از پایه انتخاب می شود.

20

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
z	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	۰	۶
x_1	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۰	۲
s_2	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۱	-۱

تکرار دوم:

گام ۴ (انتخاب متغیر وارد شونده): ضرایب سطر تابع هدف را نظیر به نظیر بر مؤلفه های منفی سطر z تقسیم کرده و کمترین مقدار حاصل، متناظر متغیر وارد شونده به پایه است. بنابراین، متغیر غیرپایه x_2 وارد پایه می شود.

21

تحقیق در عملیات

گام ۵، متغیر غیرپایه x_2 را جایگزین متغیر پایه s_2 کرده و جدول جدید، رسم و یکه سازی می شود.

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
z	۰	۰	$-\frac{1}{2}$	-۱	۷
x_1	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۱	۱
x_2	۰	۱	$\frac{1}{2}$	-۲	۲

22

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
z	0	0	$-1/2$	-1	7
x_1	1	0	$-1/2$	1	1
x_2	0	1	$1/2$	-2	2

تکرار سوم:

گام ۲ (تست شدنی بودن): جواب فعلی با توجه به مثبت بودن بردار سمت راست، شدنی است و همچنین، الگوریتم با توجه به برقراری شرط بهینگی، خاتمه می یابد. در نتیجه، جواب پایه فعلی با مختصات $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (1, 2, 0, 0)$ و مقدار تابع هدف $z = 7$ جواب بهینه مسئله است.

23

تحقیق در عملیات

مثال ۳-۱۲. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max z = -4x_1 - 6x_2 - 18x_3$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + 3x_3 \geq 3,$$

$$3x_2 + 2x_3 \geq 5,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

برای حل این مسئله به روش سیمپلکس دوگان، ابتدا طرفین محدودیت های آن را در -1 ضرب کرده و سپس متغیرهای کمکی را به آنها اضافه می کنیم:

$$\max z = -4x_1 - 6x_2 - 18x_3$$

$$\text{s. t. } -2x_1 - 3x_3 + s_1 = -3,$$

$$-3x_2 - 2x_3 + s_2 = -5,$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0.$$

24

تحقیق در عملیات

جدول آغازین روش سیمپلکس دوگان به صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R. H. S
Z	4	6	18	0	0	0
s_1	-2	0	-3	1	0	-3
s_2	0	-3	-2	0	1	-5

با توجه به اینکه این جدول دارای شرط بهینگی است، روش سیمپلکس دوگان برای یافتن جواب بهینه آن بکار می رود. در هر جدول، عنصر لولا که متناظر متغیرهای وارد شونده و خارج شونده است، مشخص شده است. سپس، به کمک عملیات سطری-مقدماتی، عنصر لولا را برابر یک کرده و مابقی مؤلفه های ستون لولا را برابر صفر می کنیم.

25

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R. H. S
Z	4	6	18	0	0	0
s_1	-2	0	-3	1	0	-3
s_2	0	-3	-2	0	1	-5
Z	4	0	14	0	2	-10
s_1	-2	0	-3	1	0	-3
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
Z	0	0	8	2	2	-16
x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

26

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R. H. S
z	0	0	8	2	2	-16
x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

با توجه به برقراری شرط بهینگی و همچنین مثبت بودن بردار سمت راست و شدنی بودن جواب به دست آمده، الگوریتم خاتمه می یابد. در نتیجه، جواب پایه فعلی با مختصات زیر، جواب بهینه مسئله است.

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 0, 0, 0), \quad z = -16$$

27

تحقیق در عملیات

مثال ۳-۱۳. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \quad z = -x_1 - 3x_2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 - 4x_2 \geq 4,$$

$$-2x_1 - x_2 \geq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

با ضرب طرفین محدودیت های این مسئله در ۱- و اضافه کردن متغیرهای کمکی به آنها داریم:

$$\max \quad z = -x_1 - 3x_2$$

$$\text{s. t.} \quad -x_1 + 4x_2 + s_1 = -4,$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = -2,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

28

تحقیق در عملیات

$$\max Z = -x_1 - 3x_2$$

$$\text{s. t. } -x_1 + 4x_2 + s_1 = -4,$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = -2,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

جدول آغازین روش سیمپلکس دوگان به صورت زیر است:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	1	3	0	0	0
s_1	-1	4	1	0	-4
s_2	2	1	0	1	-2

29

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	1	3	0	0	0
s_1	-1	4	1	0	-4
s_2	2	1	0	1	-2
Z	0	7	1	0	-4
x_1	1	-4	-1	0	4
s_2	0	9	2	1	-10

30

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	۰	۷	۱	۰	-۴
x_1	۱	-۴	-۱	۰	۴
s_2	۰	۹	۲	۱	-۱۰

در جدول آخر، ملاحظه می شود که یک متغیر با مقدار منفی در پایه است و به عنوان متغیر خارج شونده از پایه انتخاب می شود. اما، سطر مربوط به این متغیر، دارای مؤلفه های نامنفی بوده و بنابراین، امکان تعیین متغیر وارد شونده به پایه وجود ندارد. در چنین حالتی، مسئله نشدنی بوده و ناحیه شدنی آن تهی است. این مطلب را با رسم محدودیت های مربوط به ناحیه شدنی نیز می توان مشاهده نمود.

تمرینات قسمت نهم

(۱) مسائل برنامه ریزی خطی زیر را به روش سیمپلکس دوگان حل کنید.

$$\begin{array}{ll}\min & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{array}\quad (\text{مسئله ۱})$$

$$\begin{array}{ll}\min & z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3, \\ & 4x_1 + 2x_3 \geq 10, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{array}\quad (\text{مسئله ۲})$$

$$\begin{array}{ll}\max & z = -2x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} & 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}\quad (\text{مسئله ۳})$$